

POLITECNICO DI MILANO



MECCANICA DEI FLUIDI

9. TURBOLENZA

A cura di: DIEGO BERZI

v1.3

Indice

1	Introduzione	3
2	Equazioni di Reynolds	5
2.1	Media alla Reynolds	5
2.2	Bilancio di massa	6
2.2.1	Forma indefinita	6
2.2.2	Forma globale	7
2.3	Bilancio di quantità di moto	7
2.3.1	Forma indefinita	7
2.3.2	Forma globale	8
2.4	Applicazione al moto turbolento in condotta	9
3	Campo di moto turbolento	16
3.1	Strutture turbolente	16
3.2	Cascata energetica	21
4	Soluzioni numeriche del moto turbolento	23
4.1	Metodi DNS	23
4.2	Metodi RANS	24
4.3	Metodi LES	25
5	Modelli di chiusura RANS	27
5.1	Modello completo degli sforzi di Reynolds	27
5.2	Viscosità turbolenta	29
5.2.1	Modelli a zero equazioni	30
5.2.2	Modelli a una equazione	35
5.2.3	Modelli a due equazioni	36

1 Introduzione

Abbiamo accennato in precedenza (Cap. 7, Par. 1) al concetto di moto turbolento. Cercheremo, in questo capitolo, di meglio caratterizzare la turbolenza (sembra che il termine turbolenza sia stato introdotto per la prima volta nel 1887 da Lord Kelvin [1]), senza tuttavia alcuna pretesa di esaustività e completezza di fronte ad un fenomeno così affascinante e complesso.

“Turbulence is that state of fluid motion which is characterized by apparently random and chaotic three-dimensional vorticity” [2]. Da questa definizione capiamo immediatamente che il moto turbolento è caotico, sempre non-stazionario (non si ripete mai uguale a sé stesso) e sempre tridimensionale. La non-stazionarietà e la tridimensionalità del moto sono presenti anche quando le condizioni al contorno sono stazionarie (per esempio, portata volumetrica in ingresso costante nel tempo) e la geometria del contorno è caratterizzata da simmetrie (come è il caso, ad esempio, del moto in condotta cilindrica a sezione circolare).

Vale la pena notare che le equazioni fondamentali che governano il moto dei fluidi (le equazioni di Navier-Stokes, nel caso di fluidi Newtoniani incompressibili) sono perfettamente valide anche in regime di moto turbolento. Il problema è risolvere tali equazioni. A causa della tridimensionalità del moto turbolento, i termini inerziali (non lineari) delle equazioni di bilancio della quantità di moto non possono mai essere eliminati: questo impedisce di trovare soluzioni analitiche al moto turbolento, anche in presenza di geometrie semplici. L’alternativa, diventata sempre più appetibile con l’aumento della potenza dei calcolatori, è quella di risolvere numericamente le equazioni differenziali di bilancio di massa e quantità di moto.

Risolvere numericamente le equazioni che governano il moto dei fluidi significa discretizzare: identificare un numero finito N_s di punti nel dominio geometrico di interesse (**nodi della griglia spaziale**) ed un numero finito N_t di istanti di tempo (**nodi della griglia temporale**), in corrispondenza dei quali risolvere le $4 * N_s * N_t$ equazioni algebriche in cui sono state trasformate le 4 equazioni differenziali di partenza (equazioni di Navier-Stokes). Tale passaggio consiste, per esempio, nel sostituire le derivate con rapporti incrementali (metodo alle differenze finite). Lasciamo ai corsi di Calcolo Numerico la trattazione di dettaglio dei metodi numerici per la soluzione di equazioni differenziali. Qui preferiamo focalizzarci sul problema di scegliere i valori ottimali di N_s e N_t , o, equivalentemente, di scegliere il **passo di griglia** (distanza spaziale/intervallo temporale tra due nodi adiacenti).

Visto che stiamo approssimando delle derivate con rapporti incrementali, è intuitivo che il passo di griglia da utilizzare sia strettamente legato alle caratteristiche dei campi di velocità e pressione nel caso di interesse. Tanto più intense sono le variazioni spaziali (gradienti elevati) e/o temporali delle variabili in gioco, tanto più piccolo dovrà essere il passo di griglia (e corrispondentemente elevato il numero di nodi). Con l’aumentare del numero di

nodi, aumenta il numero di equazioni da risolvere e l'onere computazionale (ore-macchina da dedicare ai calcoli). Come dimostreremo più avanti, il numero di nodi della griglia nel caso di problemi fluidodinamici turbolenti è talmente elevato da rendere impraticabile la soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes, stante le potenze di calcolo attuali (la situazione non cambierà nei prossimi decenni, nonostante la potenza dei calcolatori continui ad aumentare, a meno di rivoluzioni clamorose quali l'avvento di computer quantistici). Eppure, i problemi che coinvolgono flussi turbolenti necessitano di risposte ingegneristiche. Le previsioni del tempo vanno fatte, gli aerei e le automobili vanno progettate, gli impianti per il trasporto di acqua e gas vanno realizzati.

Ottenere la soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes nel caso di moto turbolento significa avere a disposizione un gran numero di informazioni riguardanti i campi di moto e di pressione istantanei. La quantità di tali informazioni è, spesso, eccessiva rispetto a quella necessaria in ottica ingegneristica. Pensiamo al moto turbolento in condotte cilindriche: invece di conoscere in dettaglio le linee di corrente istante per istante, sembrerebbe sufficiente avere un'idea di come **in media** si comporta il flusso. In realtà, anche questo **moto medio** deve essere ottenuto per via numerica, discretizzando opportune equazioni una volta definita una griglia spazio-temporale. Il **moto medio** è, però, caratterizzato da variazioni spaziali e temporali delle variabili meno intense: rispetto alla soluzione numerica del moto istantaneo, il passo di griglia richiesto è, di conseguenza, più grande. Tanto più grande, da consentire di ottenere effettivamente la soluzione numerica in tempi ragionevoli con la potenza di calcolo attualmente disponibile. Inoltre, anche se il moto turbolento è sempre non stazionario e tridimensionale, **in media** il moto potrebbe essere indipendente dal tempo e, magari, caratterizzato da simmetrie spaziali, ovviamente se le condizioni al contorno lo consentono, con indubbi risparmi computazionali.

Nel prossimo paragrafo, ci occuperemo in maniera più rigorosa del concetto di media e vedremo quali sono le equazioni differenziali che governano il moto medio.

2 Equazioni di Reynolds

2.1 Media alla Reynolds

Si deve a Osborne Reynolds [3], il primo ad avere identificato e caratterizzato le differenze tra moto laminare e turbolento (Cap. 7, Par. 1), la prima rigorosa trattazione del problema della turbolenza mediante un processo di media.

Definiamo **media alla Reynolds** di una generica grandezza ξ la quantità:

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \xi dt, \quad (1)$$

dove T rappresenta l'ampiezza della finestra mobile temporale centrata attorno all'istante di tempo t sulla quale si media. La media alla Reynolds è, dunque, nella nostra accezione, una **media temporale a finestra mobile**. In realtà, il primo ad aver introdotto l'idea di media temporale è stato Joseph Boussinesq nel 1877 [4], mentre Osborne Reynolds, nel suo famoso articolo del 1895, aveva preferito utilizzare una media su volume [3]. Più recentemente, si preferisce definire la media alla Reynolds come media di insieme. L'analisi presentata in questo paragrafo si applica, con opportune modifiche, anche alle altre tipologie di media citate.

Avendo definito il concetto di media, si può ora esprimere il valore istantaneo della generica grandezza ξ come

$$\xi = \langle \xi \rangle + \xi', \quad (2)$$

dove ξ' rappresenta la **fluttuazione turbolenta** attorno alla media. L'operazione rappresentata nell'Eq.(2) prende il nome di **decomposizione di Reynolds**. Nella visione di Reynolds, tali fluttuazioni sono viste come disturbi da eliminare nell'ottica di una soluzione ingegneristica ai flussi turbolenti. Dalla definizione di media e dalla decomposizione di Reynolds segue immediatamente che la media delle fluttuazioni è nulla. Infatti,

$$\langle \xi' \rangle = \langle \xi - \langle \xi \rangle \rangle = \langle \xi \rangle - \langle \xi \rangle = 0, \quad (3)$$

dove abbiamo usato il fatto che la media di una grandezza media è uguale alla media stessa.

La scelta dell'ampiezza dell'intervallo T non è universale, ma varia in funzione del problema in esame. L'intervallo T deve essere abbastanza ampio da eliminare le non-stazionarietà dovute alla turbolenza (**fluttuazioni di piccola scala**), ma abbastanza piccolo da fare in modo che la media sia comunque influenzata dalle eventuali non-stazionarietà di grande scala indotte dalle condizioni al contorno (per esempio, nel caso di portata in ingresso che varia nel tempo). In Fig. 1 è riportato un esempio di andamento nel tempo della grandezza ξ in cui sono evidenti sia le fluttuazioni di piccola

scala che la non-stazionarietà di grande scala (sinusoidale in questo caso). Una scelta opportuna dell'intervallo di tempo T consente di eliminare solo le fluttuazioni turbolente; un'ampiezza eccessiva di T comporta una perdita di informazioni utili dal punto di vista ingegneristico.

Applichiamo ora la media alla Reynolds alle equazioni che governano la dinamica dei fluidi viscosi. Per semplicità, limitiamo la nostra analisi al caso di fluidi incomprimibili per i quali valgono le equazioni di Navier-Stokes (Cap. 8 Par. 1.1).

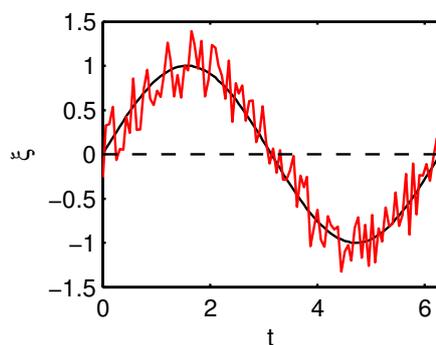


Figura 1: esempio di andamento nel tempo della variabile istantanea (linea rossa continua); media alla Reynolds con scelta corretta della finestra temporale (linea nera continua); media alla Reynolds con ampiezza eccessiva della finestra temporale (linea nera tratteggiata).

2.2 Bilancio di massa

2.2.1 Forma indefinita

L'operatore media alla Reynolds applicato all'equazione di continuità fornisce

$$\langle \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \rangle = \nabla \cdot \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle = 0. \quad (4)$$

L'inversione tra divergenza e media alla Reynolds è possibile applicando la regola di Leibniz¹ (inversione tra le operazioni di integrazione e differenziazione), tenendo conto del fatto che l'ampiezza della finestra temporale T nella media alla Reynolds è costante (non varia né nello spazio né nel tempo). L'Eq.(4) risulta formalmente identica all'equazione di continuità delle equazioni di Navier-Stokes, con l'unica differenza di avere sostituito il campo di moto medio $\langle \bar{\mathbf{v}} \rangle$ al campo di moto istantaneo $\bar{\mathbf{v}}$. Usando la

¹La regola di Leibniz regola la differenziazione sotto il segno di integrale [5] e formalmente afferma che $\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega(\tau)} f d\omega = \int_{\Omega(\tau)} \frac{\partial f(\omega, \tau)}{\partial \tau} d\omega + f(\Omega, \tau) \frac{d\Omega}{d\tau}$, dove f è una generica funzione nelle due variabili ω e τ , e Ω è il dominio di integrazione.

decomposizione di Reynolds e l'Eq.(4), si ricava

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \nabla \cdot (\langle \bar{\mathbf{v}} \rangle + \bar{\mathbf{v}}') = \nabla \cdot \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle + \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}' = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}' = 0, \quad (5)$$

cioè che anche il campo di moto fluttuante ha divergenza nulla (isocoro).

2.2.2 Forma globale

Se integriamo su un volume di controllo W l'Eq.(4), e usiamo il teorema della divergenza, otteniamo

$$\int_W \nabla \cdot \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle dW = - \int_A \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0, \quad (6)$$

cioè che la portata volumetrica media netta che attraversa il contorno del volume di controllo è pari a zero (la portata entrante nel volume è pari a quella uscente).

2.3 Bilancio di quantità di moto

2.3.1 Forma indefinita

Applichiamo ora l'operatore media alla Reynolds all'equazione di bilancio della quantità di moto in forma conservativa,

$$\left\langle \frac{\partial (\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} \right\rangle. \quad (7)$$

Sfruttiamo la proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla somma e applichiamo ripetutamente la regola di Leibniz, con l'ipotesi di incomprimibilità del fluido, ottenendo

$$\frac{\partial (\rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} \rangle) = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \langle p \rangle + \mu \nabla^2 \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle. \quad (8)$$

Usiamo l'Eq.(2) per riscrivere il termine delle inerzie convettive nell'Eq.(8) come

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} \rangle) &= \nabla \cdot [\rho \langle (\langle \bar{\mathbf{v}} \rangle + \bar{\mathbf{v}}') (\langle \bar{\mathbf{v}} \rangle + \bar{\mathbf{v}}') \rangle] = \\ &= \nabla \cdot (\rho \langle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \bar{\mathbf{v}}' \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}' \rangle) = \\ &= \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \langle \bar{\mathbf{v}}' \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \rangle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}' \rangle) = \\ &= \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}' \rangle), \end{aligned} \quad (9)$$

dove abbiamo usato, ancora una volta, il fatto che la media alla Reynolds di una grandezza media è uguale alla grandezza media stessa, e che la media alla Reynolds delle fluttuazioni è nulla per definizione. La media alla Reynolds dell'unico termine non lineare delle equazioni di Navier-Stokes origina due termini: uno rappresenta le inerzie convettive del moto medio e uno

rappresenta le inerzie convettive associate con le fluttuazioni di velocità. In generale, quest'ultimo termine non è nullo, anche se rappresenta la media del prodotto di due funzioni a media nulla. Pensiamo, ad esempio, alla funzione seno: è una funzione che ha media nulla nell'intervallo compreso tra 0 e 2π , ma il suo quadrato (prodotto di due funzioni a media nulla) ha media pari a $1/2$ nello stesso intervallo. Il termine delle inerzie convettive associato con le fluttuazioni di velocità può essere riscritto come

$$\nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}' \rangle) = \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}}_{\text{Re}}, \quad (10)$$

dove $\overline{\overline{\Phi}}_{\text{Re}}$ è il **tensore degli sforzi di Reynolds** , un tensore simmetrico il cui generico elemento $\rho \langle v'_i v'_j \rangle$ rappresenta lo **sforzo turbolento** . Usando le Eqs. (9) e (10) nell'Eq.(8) otteniamo la forma definitiva dell'equazione di bilancio della quantità di moto media,

$$\frac{\partial (\rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle) = -\rho g \nabla \bar{z} - \nabla \langle p \rangle + \mu \nabla^2 \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle - \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}}_{\text{Re}}. \quad (11)$$

2.3.2 Forma globale

Se applichiamo la media alla Reynolds all'equazione di bilancio di quantità di moto in forma globale (Cap. 8, Par. 1.2) e sfruttiamo la proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla somma, otteniamo

$$\langle \bar{\mathbf{I}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{M}} \rangle + \bar{\mathbf{G}} + \langle \bar{\mathbf{\Pi}}_p \rangle + \langle \bar{\mathbf{\Pi}}_\mu \rangle = \bar{\mathbf{0}}, \quad (12)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\langle \bar{\mathbf{G}} \rangle = \bar{\mathbf{G}}$ (la media alla Reynolds non modifica la forza peso). I termini lineari nell'Eq.(12) si calcolano facilmente, sostituendo nella definizione le grandezze istantanee con quelle medie (per via della regola di Leibniz). Risulta, quindi,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{I}} \rangle &= -\frac{\partial (\int_W \rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle dW)}{\partial t}, \\ \langle \bar{\mathbf{\Pi}}_p \rangle &= \int_A \langle p \rangle \hat{\mathbf{n}} dA, \\ \langle \bar{\mathbf{\Pi}}_\mu \rangle &= -\int_A \mu \frac{\partial \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle}{\partial n} dA. \end{aligned} \quad (13)$$

Applicando al flusso di quantità di moto la decomposizione di Reynolds, otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{M}} \rangle &= \int_A \rho \langle (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{v}} \rangle dA = \int_A \rho \langle [(\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}') \cdot \hat{\mathbf{n}}] (\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}') \rangle dA = \\ &= \int_A \rho \langle (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{v}} \rangle dA + \int_A \rho \langle (\bar{\mathbf{v}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{v}}' \rangle dA = \bar{\mathbf{M}}_m + \bar{\mathbf{M}}'. \end{aligned} \quad (14)$$

Al solito, abbiamo sfruttato il fatto che la media alla Reynolds di una grandezza media è uguale alla grandezza media, e che la media alla Reynolds delle fluttuazioni è nulla. Esattamente come nel caso dell'equazione di bilancio di quantità di moto in forma indefinita, la media alla Reynolds del termine non lineare origina due termini: un termine $\overline{\mathbf{M}}_m$ che rappresenta il flusso di quantità di moto medio, e un termine $\overline{\mathbf{M}}'$ che rappresenta il flusso di quantità di moto turbolento dovuto alle componenti di agitazione. L'Eq.(12) diventa, allora,

$$\langle \overline{\mathbf{I}} \rangle + \overline{\mathbf{M}}_m + \overline{\mathbf{M}}' + \overline{\mathbf{G}} + \langle \overline{\mathbf{\Pi}}_p \rangle + \langle \overline{\mathbf{\Pi}}_\mu \rangle = \overline{\mathbf{0}}. \quad (15)$$

Le Eqs. (4) e (11) rappresentano le **equazioni di Reynolds** (Reynolds-Averaged Navier-Stokes, o semplicemente **RANS**, equations) in forma indefinita, che in forma globale diventano le Eqs. (6) e (15). A differenza delle equazioni di Navier-Stokes, le equazioni di Reynolds non sono chiuse. Per esempio, nella forma indefinita, i 6 elementi del tensore simmetrico di Reynolds rappresentano altrettante incognite aggiuntive rispetto ai campi di moto e di pressione medi. Per risolvere tali equazioni, si devono, perciò, fornire informazioni aggiuntive. Il problema di fornire queste informazioni prende il nome di **problema di chiusura della turbolenza**. Prima di dedicarci a possibili soluzioni al problema della chiusura delle equazioni di Reynolds, applichiamo ad un caso semplice di moto in condotta.

2.4 Applicazione al moto turbolento in condotta

Risolviamo ora il caso di un fluido Newtoniano incomprimibile che si muove, in condizioni di moto turbolento e portata Q costante **in media**, in una condotta cilindrica a sezione circolare di diametro D (e raggio R) e asse rettilineo inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo ψ . Questo caso è stato analizzato in precedenza utilizzando un approccio sperimentale (Cap. 7), e risolto analiticamente nel caso di moto laminare (Cap. 8, Par. 3.4). Dato che il moto è stazionario in media, ci aspettiamo che l'unica componente di velocità media sia quella in direzione assiale x . L'equazione di continuità di Reynolds (Eq.(4)) si riduce allora a:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Usiamo ora l'equazione di bilancio di quantità di moto di Reynolds in forma globale. Identifichiamo un volume di controllo costituito da un cilindro coassiale con la condotta di raggio r e lunghezza L (Fig. 2).

Suddividiamo la superficie di contorno del volume di controllo in due superfici piane denominate 1 e 2 (le basi del cilindro, aventi normale pari a $\hat{\mathbf{i}}$ e $-\hat{\mathbf{i}}$ rispettivamente) e una superficie curva 0 (la superficie laterale del

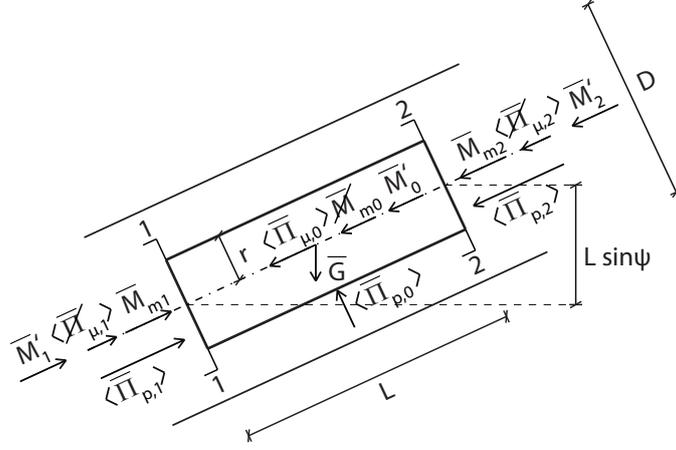


Figura 2: volume di controllo per l'applicazione delle equazioni di Reynolds in forma globale al moto turbolento in condotta.

cilindro). Sul volume di controllo vale l'Eq.(15), che si scrive

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{I}} \rangle + \bar{\mathbf{M}}_{m0} + \bar{\mathbf{M}}_{m1} + \bar{\mathbf{M}}_{m2} + \bar{\mathbf{M}}'_0 + \bar{\mathbf{M}}'_1 + \bar{\mathbf{M}}'_2 + \bar{\mathbf{G}} + \\ \langle \bar{\Pi}_{p,0} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{p,1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{p,2} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{\mu,0} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{\mu,1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{\mu,2} \rangle = \bar{\mathbf{0}}, \quad (17) \end{aligned}$$

dove:

- la risultante delle inerzie locali medie $\langle \bar{\mathbf{I}} \rangle$ è nulla perché il problema è stazionario in media;
- il flusso di quantità di moto medio attraverso la superficie laterale A_0 del cilindro, $\bar{\mathbf{M}}_{m0} = \int_{A_0} \rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle dA$, è nullo perché il versore normale ad ogni elemento infinitesimo di superficie laterale è diretto radialmente, mentre la velocità media ha solo componente assiale, per cui $\langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ dappertutto;
- il flusso di quantità di moto medio attraverso la superficie piana 1 di area A_1 risulta, con $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_{m1} &= \int_{A_1} \rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle dA = \int_{A_1} \rho \langle u \rangle \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} \langle u \rangle \hat{\mathbf{i}} dA \\ &= \int_{A_1} \rho \langle u \rangle^2 \hat{\mathbf{i}} dA = \rho \left(\int_{A_1} \langle u \rangle^2 dA \right) \hat{\mathbf{i}} = \beta_1 \rho \langle V_1 \rangle^2 \pi r^2 \hat{\mathbf{i}}, \end{aligned}$$

dove $\beta_1 = \int_{A_1} \langle u \rangle^2 dA / (\langle V \rangle^2 A_1)$ è il coefficiente di ragguaglio del flusso di quantità di moto medio, qui introdotto per poter utilizzare il quadrato della media alla Reynolds della velocità media areale $\langle V_1 \rangle = \int_{A_1} \langle u \rangle dA / A_1$ invece dell'integrale del quadrato della velocità sulla sezione trasversale. $\bar{\mathbf{M}}_{m1}$ è normale alla superficie 1, diretto

entrante nel volume, e, per simmetria della distribuzione di velocità media, ha retta di applicazione passante per il baricentro della sezione.

- Il flusso di quantità di moto medio attraverso la superficie piana 2 di area $A_2 = A_1$ risulta, con $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{i}}$,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{M}}_{m2} &= \int_{A_2} \rho \langle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle dA = - \int_{A_2} \rho \langle \langle u \rangle \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} \rangle \langle u \rangle \hat{\mathbf{i}} dA \\ &= - \int_{A_2} \rho \langle u \rangle^2 \hat{\mathbf{i}} dA = -\rho \left(\int_{A_2} \langle u \rangle^2 dA \right) \hat{\mathbf{i}} = -\beta_2 \rho \langle V_2 \rangle^2 \pi r^2 \hat{\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

Anche $\overline{\mathbf{M}}_{m2}$ è normale alla superficie 2, diretto entrante nel volume, e, per simmetria della distribuzione di velocità, ha retta di applicazione passante per il baricentro della sezione. Il coefficiente β_2 e la velocità $\langle V_2 \rangle$ sono uguali a β_1 e $\langle V_1 \rangle$, rispettivamente, dal momento che la velocità media non cambia in direzione x (per la continuità).

- La forza peso $\overline{\mathbf{G}}$ risulta diretta verticalmente verso il basso, con retta di applicazione passante per il baricentro del volume; il suo modulo è pari a $\gamma \pi r^2 L$, mentre la componente in direzione x è pari a $-\gamma \pi r^2 L \sin \psi$.
- La risultante delle pressioni medie sulla superficie laterale $\langle \overline{\mathbf{\Pi}}_{p,0} \rangle = \int_{A_0} \langle p \rangle \hat{\mathbf{n}} dA$ risulta diretta radialmente (il versore per ogni superficie infinitesima è infatti perpendicolare all'asse del cilindro) e, per simmetria, è contenuta nel piano verticale che contiene l'asse del cilindro.
- La risultante delle pressioni medie sulla superficie 1 risulta, con $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}$,

$$\langle \overline{\mathbf{\Pi}}_{p,1} \rangle = \int_{A_1} \langle p \rangle \hat{\mathbf{n}} dA = \langle p_1 \rangle \pi r^2 \hat{\mathbf{i}},$$

dove $\langle p_1 \rangle$ è la pressione media in corrispondenza del baricentro della sezione 1. È un vettore diretto normalmente alla superficie 1 ed entrante nel volume se $\langle p_1 \rangle$ è positiva. La sua retta di applicazione passa per il baricentro del solido delle pressioni medie.

- La risultante delle pressioni medie sulla superficie 2 risulta, con $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{i}}$,

$$\langle \overline{\mathbf{\Pi}}_{p,2} \rangle = \int_{A_2} \langle p \rangle \hat{\mathbf{n}} dA = -\langle p_2 \rangle \pi r^2 \hat{\mathbf{i}},$$

dove $\langle p_2 \rangle$ è la pressione media in corrispondenza del baricentro della sezione 2. È un vettore diretto normalmente alla superficie 2 ed entrante nel volume se $\langle p_2 \rangle$ è positiva. La sua retta di applicazione passa per il baricentro del solido delle pressioni medie.

- La risultante degli sforzi viscosi medi sulla superficie laterale risulta

$$\begin{aligned}\langle \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mu,0} \rangle &= - \int_{A_0} \mu \frac{\partial \langle \overline{v} \rangle}{\partial n} dA = -\mu \left(\int_{A_0} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial n} dA \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &= -\mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial n} A_0 \hat{\mathbf{i}} = -\mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial n} 2\pi r L \hat{\mathbf{i}} = -\tau_{visc} 2\pi r L \hat{\mathbf{i}},\end{aligned}$$

visto che la derivata della velocità in direzione perpendicolare all'asse è una costante, per simmetria cilindrica, sulla superficie laterale (che si trova a una distanza fissata dall'asse) e avendo introdotto la legge di Newton, $\tau_{visc} = \mu \partial \langle u \rangle / \partial n$, con τ_{visc} **sforzo tangenziale viscoso**. $\langle \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mu,0} \rangle$, per simmetria della distribuzione di velocità media, è un vettore diretto come l'asse x , avente verso opposto a quello del moto e retta di applicazione che coincide con l'asse del cilindro.

- La risultante degli sforzi viscosi medi sulla superficie piana 1 risulta, con $n = x$,

$$\langle \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mu,1} \rangle = - \int_{A_1} \mu \frac{\partial \langle \overline{v} \rangle}{\partial n} dA = -\mu \left(\int_{A_1} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} dA \right) \hat{\mathbf{i}} = \overline{\mathbf{0}},$$

visto che per continuità la derivata della velocità media in direzione x è ovunque nulla.

- La risultante degli sforzi viscosi medi sulla superficie piana 2 risulta, con $n = -x$,

$$\langle \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mu,2} \rangle = - \int_{A_2} \mu \frac{\partial \langle \overline{v} \rangle}{\partial n} dA = \mu \left(\int_{A_2} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} dA \right) \hat{\mathbf{i}} = \overline{\mathbf{0}},$$

sempre per continuità.

- Il flusso di quantità di moto turbolento attraverso la superficie laterale A_0 del cilindro risulta

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{M}}'_0 &= \int_{A_0} \rho \langle v'_n \overline{\mathbf{v}}' \rangle dA = \left(\int_{A_0} \rho \langle v'_n u' \rangle dA \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &= \rho \langle v'_n u' \rangle 2\pi r L \hat{\mathbf{i}} = -\tau_{turb} 2\pi r L \hat{\mathbf{i}},\end{aligned}$$

visto che: (i) la quantità media $\langle v'_n \overline{\mathbf{v}}' \rangle$ è una funzione della velocità, e ci aspettiamo che essa sia simmetrica rispetto all'asse esattamente come la velocità media (per cui è nullo l'integrale sulla superficie laterale del cilindro delle componenti normali all'asse); (ii) sempre per simmetria la quantità media $\langle v'_n u' \rangle$ dipende solo dalla distanza dall'asse, per cui è costante sulla superficie laterale del cilindro; (iii) ci aspettiamo che la quantità $\langle v'_n u' \rangle$ sia negativa. Quest'ultima affermazione si può spiegare notando che, se v'_n è negativa (diretta verso la parete), il volume di

controllo perde componente x di quantità di moto; se v'_n è positiva (diretta verso l'asse), il volume di controllo acquista componente x di quantità di moto. La velocità in direzione x è, però, minore lontano dall'asse, per cui, in media, ci si aspetta che il volume di controllo perda quantità di moto in direzione x ($\langle v'_n u' \rangle < 0$). La grandezza $\tau_{turb} = -\rho \langle v'_n u' \rangle$ è lo **sforzo tangenziale turbolento**.

- I flussi di quantità di moto turbolenti attraverso le superfici piane 1 e 2 risultano, con $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}$ e $-\hat{\mathbf{i}}$ rispettivamente,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{M}}'_1 &= \int_{A_1} \rho \langle v'_n \bar{\mathbf{v}}' \rangle dA = \left(\int_{A_1} \rho \langle u'^2 \rangle dA \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &= \left(\int_{A_2} \rho \langle u'^2 \rangle dA \right) \hat{\mathbf{i}} = - \int_{A_2} \rho \langle v'_n \bar{\mathbf{v}}' \rangle dA = -\overline{\mathbf{M}}'_2,\end{aligned}$$

visto che: (i) la quantità media $\langle v'_n \bar{\mathbf{v}}' \rangle$ è una funzione della velocità, e ci aspettiamo che essa sia simmetrica rispetto all'asse esattamente come la velocità media (per cui sono nulli gli integrali sulle superfici piane delle componenti normali all'asse); (ii) essendo la quantità media $\langle v'_n \bar{\mathbf{v}}' \rangle$ una funzione della velocità, ci aspettiamo che essa non vari in modulo in direzione x , esattamente come la velocità media. Per simmetria e per continuità, i vettori $\overline{\mathbf{M}}'_1$ e $\overline{\mathbf{M}}'_2$ sono, quindi, diretti come l'asse x , hanno verso opposto e modulo uguale, e retta di applicazione passante per il baricentro delle superfici piane.

Proiettiamo ora l'Eq.(17) in direzione x , rispetto alla quale $\langle \overline{\Pi}_{p,0} \rangle$ non ha componente, ottenendo

$$G_x + \langle \Pi_{p,1,x} \rangle + \langle \Pi_{p,2,x} \rangle + \langle \Pi_{\mu,0,x} \rangle + M'_{0,x} = 0, \quad (18)$$

visto che i flussi di quantità di moto si elidono a vicenda. Sostituendo le componenti x dei termini superstiti, risulta

$$(\tau_{visc} + \tau_{turb}) 2\pi r L = -\gamma \pi r^2 L \sin \psi + \langle p_1 \rangle \pi r^2 - \langle p_2 \rangle \pi r^2. \quad (19)$$

Notiamo che la quantità $L \sin \psi$ rappresenta la differenza di quota geodetica tra i baricentri della sezione 2 e della sezione 1, $\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1$. Se facciamo questa sostituzione e raccogliamo a secondo membro il peso specifico e l'area della sezione trasversale, otteniamo

$$(\tau_{visc} + \tau_{turb}) 2\pi r L = \gamma \pi r^2 \left[\left(\tilde{z}_1 + \frac{\langle p_1 \rangle}{\gamma} \right) - \left(\tilde{z}_2 + \frac{\langle p_2 \rangle}{\gamma} \right) \right]. \quad (20)$$

La differenza tra le quote piezometriche medie della sezione 1 e della sezione 2 equivale alla perdita di energia meccanica JL subita dalla corrente lungo il tratto di lunghezza L . L'Eq.(20) si riduce, allora, a

$$\tau_{visc} + \tau_{turb} = \gamma \frac{r}{2} J, \quad (21)$$

che indica che lo sforzo tangenziale totale, somma di quello viscoso e di quello turbolento, è distribuito linearmente con la coordinata radiale: è nullo in corrispondenza dell'asse e massimo in corrispondenza della parete della condotta.

Per quanto riguarda le singole componenti dello sforzo tangenziale, notiamo che: lo sforzo viscoso è nullo in corrispondenza dell'asse, perché la velocità media in direzione x è nulla in parete e deve presentare un massimo in corrispondenza dell'asse per simmetria (per cui la derivata della velocità media in direzione perpendicolare all'asse deve essere nulla quando $r = 0$); lo sforzo turbolento è nullo in corrispondenza dell'asse, perché uguale alla differenza tra quello totale e quello viscoso, entrambi nulli in corrispondenza dell'asse; lo sforzo turbolento è nullo in corrispondenza della parete, perché lì sia la componente tangenziale che quella perpendicolare alla parete della velocità sono sempre nulle, per la condizione di no slip e per il principio di impenetrabilità dei corpi; lo sforzo turbolento per il teorema degli zeri deve allora presentare un massimo a una certa distanza dall'asse. La distribuzione dello sforzo tangenziale e delle sue componenti sulla sezione trasversale al flusso nella condotta è rappresentata in Fig. 3.

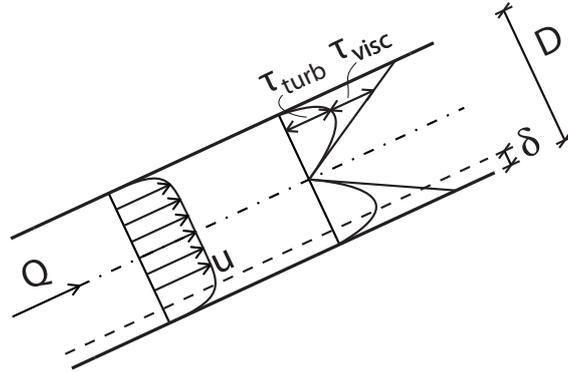


Figura 3: profili medi di velocità e sforzo tangenziale nel moto turbolento in condotta.

Come già detto, lo sforzo turbolento è nullo alla parete, dove quello viscoso è, invece, massimo. Esisterà, dunque, uno straterello di spessore δ in prossimità della parete dove lo sforzo turbolento è trascurabile rispetto a quello viscoso. Tale strato prende il nome di **substrato limite viscoso** e il suo spessore, adimensionalizzato con il diametro D della condotta, diminuisce all'aumentare del numero di Reynolds. All'interno di tale strato, non solo la turbolenza, ma anche le inerzie, in generale, sono trascurabili. In particolare, sono, dunque, trascurabili anche le inerzie convettive dovute alle curvature delle traiettorie delle particelle generate dalla presenza della scabrezza di parete. È la competizione tra lo spessore δ del substrato limite viscoso e la scabrezza \mathcal{R} a determinare l'indice di resistenza λ (Cap. 7,

Par. 1.2). Se $\delta > \mathcal{R}$ la scabrezza è interamente annegata nel substrato limite viscoso e la condotta è **idraulicamente liscia** (λ è dato dalla formula di Prandtl-von Kármán per tubi lisci); se $\delta < \mathcal{R}$, la scabrezza è emersa totalmente dal substrato limite viscoso e siamo in condizioni di moto assolutamente turbolento (λ è dato dalla formula di Prandtl-von Kármán per tubi scabri); se $\delta \sim \mathcal{R}$, il moto è turbolento di transizione.

Se sostituiamo le espressioni dello sforzo viscoso e di quello turbolento nell'Eq.(21), e notiamo che, sulla superficie laterale, $n = -r$, otteniamo

$$\mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r} - \rho \langle u'v'_r \rangle = -\gamma \frac{r}{2} J. \quad (22)$$

L'Eq.(22) non consente di determinare la distribuzione di velocità media in condizioni di moto turbolento, visto che il termine associato con le fluttuazioni di velocità è incognito (problema della chiusura). Abbiamo, però, già mostrato che il termine $\langle u'v'_n \rangle$ è negativo, per cui $\langle u'v'_r \rangle$ è positivo. Esso concorre a ridurre il gradiente di velocità in direzione radiale: il risultato è che il profilo di velocità media in moto turbolento risulta più appiattito rispetto a quello parabolico che caratterizza il moto laminare. Dunque, il profilo di velocità in moto turbolento risulta più prossimo a quello uniforme, per via delle componenti di agitazione in direzione trasversale che tendono ad omogeneizzarlo: questo rende ragione del fatto che i coefficienti di ragguaglio α e β della potenza cinetica e del flusso di quantità di moto sono prossimi all'unità in regime turbolento. Un esempio di profilo di velocità medio in regime turbolento è rappresentato in Fig. 3.

3 Campo di moto turbolento

3.1 Strutture turbolente

Evidenziamo ora in luce un paradosso che ha messo a dura prova l'idea stessa di meccanica del continuo [6]. L'equazione di bilancio della quantità di moto di Navier-Stokes in forma adimensionale, in assenza di una pressione e di un tempo scala di riferimento, risulta (Cap. 8, Par. 2):

$$\frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial t} + \check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{v}} = -\check{\nabla} \check{p}_e + \frac{1}{\text{Re}} \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}}, \quad (23)$$

dove Re è, al solito, il numero di Reynolds. Se il numero di Reynolds tende a infinito, l'ultimo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(23), quello viscoso, sembrerebbe tendere a zero e le equazioni di Navier-Stokes ridursi alle equazioni di Eulero, che governano il moto dei fluidi ideali. Ma i fluidi ideali si muovono senza dissipazioni di energia, mentre gli esperimenti mostrano, per esempio, che la cadente energetica J non si annulla per $\text{Re} \rightarrow \infty$ nel caso di moto in condotta cilindrica: l'indice di resistenza λ assume il valore in condizioni di moto assolutamente turbolento, che è indipendente dal numero di Reynolds (Cap. 7, Par. 1.2). Questa analisi sembra suggerire che, in tale condizione limite, sia lo sforzo turbolento ad essere responsabile delle dissipazioni energetiche della corrente. Il problema è che lo sforzo turbolento **non è dissipativo**, avendo origine dai termini inerziali dell'equazione di bilancio di quantità di moto. Se aumenta la turbolenza, aumenta la componente di agitazione della velocità, cioè aumenta l'energia cinetica associata con il moto di agitazione. Ma questa energia cinetica non viene dissipata, a meno che non intervenga la viscosità a trasformarla, almeno in parte, in energia termica. Il paradosso nasce proprio dal fatto che, quando la turbolenza è infinita, la dissipazione viscosa, e, quindi, le perdite energetiche, sembrerebbero doversi annullare, in contrasto coi risultati sperimentali.

La soluzione del paradosso sta nel riconoscere che il laplaciano della velocità nell'Eq.(23) deve dipendere dal numero di Reynolds, e deve tendere a infinito quando $\text{Re} \rightarrow \infty$. È questo un esempio di funzione continua non differenziabile, che ora conosciamo col nome di **frattale** [7].

Secondo una definizione per nulla rigorosa, un frattale è un oggetto in cui le parti sono *in qualche modo* legate al tutto [8]. Un esempio piuttosto noto di frattale in ambito geometrico è dato dalla curva di Koch [9] rappresentata in Fig. 4.² Per tale curva è semplice dimostrare³ che il numero N di segmenti

²Tale curva si ottiene rimpiazzando, ad ogni step, la parte centrale di ciascun segmento che la compone, una volta diviso in tre parti uguali, con due segmenti aventi la stessa lunghezza e che formano un angolo di 60 gradi. Lo step iniziale è costituito da un segmento rettilineo di lunghezza definita (iniziatore).

³La lunghezza totale di tutti i segmenti che compongono la curva di Koch dipende dalla risoluzione dello strumento che abbiamo a disposizione per effettuare la misura. Se per esempio il nostro strumento di misura ha come risoluzione la lunghezza del segmento

di lunghezza ϵ in essa contenuti varia in funzione di ϵ secondo la legge:

$$N = \epsilon^{-\frac{\log 4}{\log 3}}. \quad (24)$$

Se la curva non fosse un frattale, ma un semplice oggetto Euclideo, l'esponente dell'Eq.(24) sarebbe semplicemente pari alla dimensione topologica, cioè 1 (un numero intero). Per estensione, si definisce frattale un qualsiasi oggetto (la definizione si applica sia a enti geometrici che a processi nel tempo) per il quale il numero N di elementi di un sottoinsieme di tale oggetto che soddisfano una certa condizione varia con la risoluzione ϵ con la quale vengono identificati come:

$$N \propto \epsilon^{-\mathcal{D}}. \quad (25)$$

dove \mathcal{D} è la **dimensione frattale** che è, in generale, pari a una frazione di numero intero (da cui il nome), diversa dalla dimensione topologica. L'Eq.(25) è una legge di potenza, rappresentata da una retta nel piano $\epsilon-N$ in scala bilogarithmica avente pendenza pari a $-\mathcal{D}$. Proprio la rappresentazione bilogarithmica dei punti sperimentali consente di identificare i fenomeni frattali e di determinarne la dimensionalità (operazione che è in generale impossibile a priori, se non per i casi più semplici).

Il carattere frattale della turbolenza è stato dimostrato sperimentalmente. Ad esempio, il contorno di un getto d'acqua che penetra all'interno di un serbatoio di fluido in quiete genera turbolenza. L'immissione nel getto di una sostanza fluorescente consente di visualizzare le zone turbolente (in cui la sostanza fluorescente si è miscelata con l'acqua) da quelle in quiete (assenza di fluorescenza). La fotografia del getto in un certo istante di tempo (Fig. 5) mostra come il contorno delle regioni turbolente sia molto irregolare. Se si tassella l'intera immagine con dei quadrati di lato r (equivalente alla risoluzione ϵ), si conta il numero N di quadrati che contengono porzioni di interfaccia tra regioni turbolente e regioni in quiete (metodo del **box counting**) e si rappresenta su un grafico bilogarithmico l'andamento di N con r , si nota che i punti sperimentali si dispongono lungo una retta di pendenza -1.36, almeno per un certo range di r (Fig. 6), indice di frattalità.

Come detto, anche processi che si sviluppano nel tempo possono presentare caratteristiche frattali. Se si misura la velocità u in un punto di un

del passo $n = 0$, tutte le curve di Fig. 4 avranno la stessa lunghezza. Se triplichiamo la risoluzione, la lunghezza della curva al passo $n = 1$ sarà uguale a $4/3$ della lunghezza della curva al passo $n = 0$, mentre le curve ai passi successivi avranno la stessa lunghezza, e così via. Risulta allora che la lunghezza Λ della curva con risoluzione ϵ è legata a quella

con risoluzione $\epsilon/3$ da $\Lambda\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = \frac{4}{3}\Lambda(\epsilon)$, la cui soluzione è $\Lambda(\epsilon) = \epsilon^{1-\frac{\log 4}{\log 3}}$. Il numero N di segmenti di lunghezza ϵ contenuto in Λ è pari a $N = \frac{\Lambda(\epsilon)}{\epsilon}$, da cui segue l'Eq.(24).

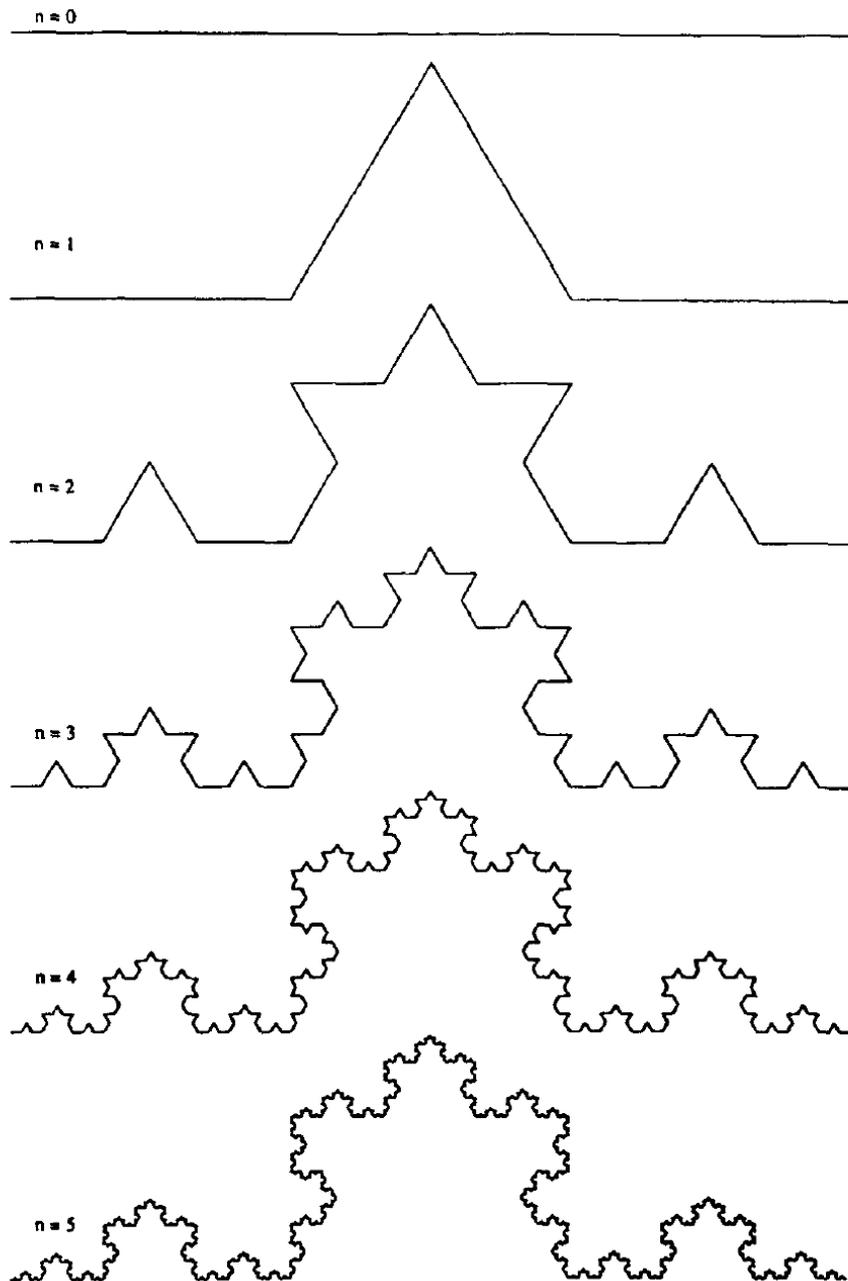


Figura 4: costruzione della curva di Koch (da [8]).

campo di moto turbolento nel tempo si ottiene qualcosa di simile alla Fig. 7. L'intersezione del segnale $u(t)$ con un'isotachia (linea a velocità costante, in questo caso pari alla soglia u_1) fornisce un insieme discreto di punti, distribuiti lungo l'asse temporale. Con il metodo del box counting, si suddivide

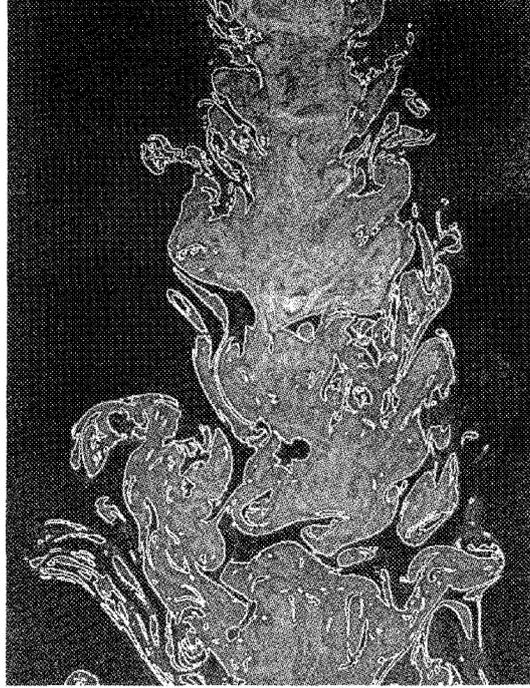


Figura 5: contorni di un getto d'acqua all'interno di un serbatoio di fluido in quiete identificati tramite immissione di sostanza fluorescente (da [8]).

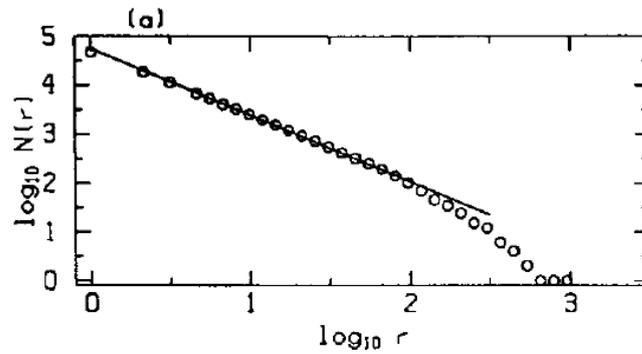


Figura 6: numero dei quadrati con cui si tassella la Fig. 5 che contengono porzioni di contorno del getto d'acqua in funzione della dimensione dei quadrati stessi (da [8]).

l'intero intervallo temporale di osservazione in segmenti di durata ϵ e si conta il numero N di tali segmenti che contiene punti a velocità u_1 . L'andamento di N con ϵ segue una legge di potenza, con pendenza pari a -0.5 (Fig. 8).

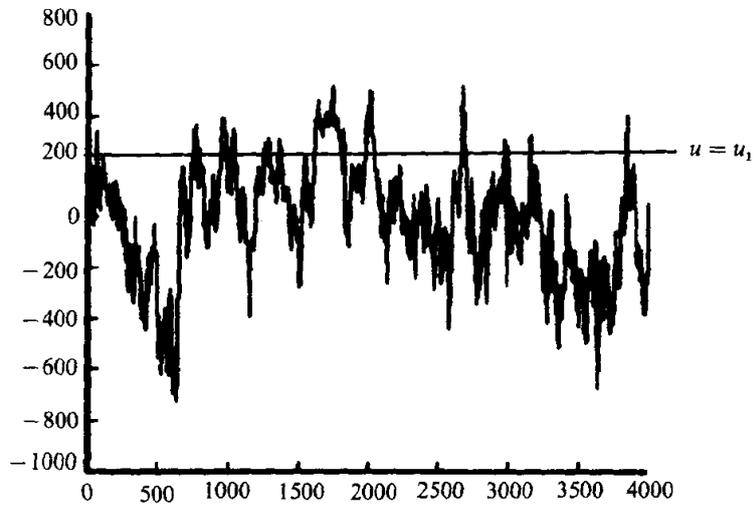


Figura 7: andamento della velocità nel tempo in un punto di un campo di moto turbolento (unità di misura arbitrarie, da [10]).

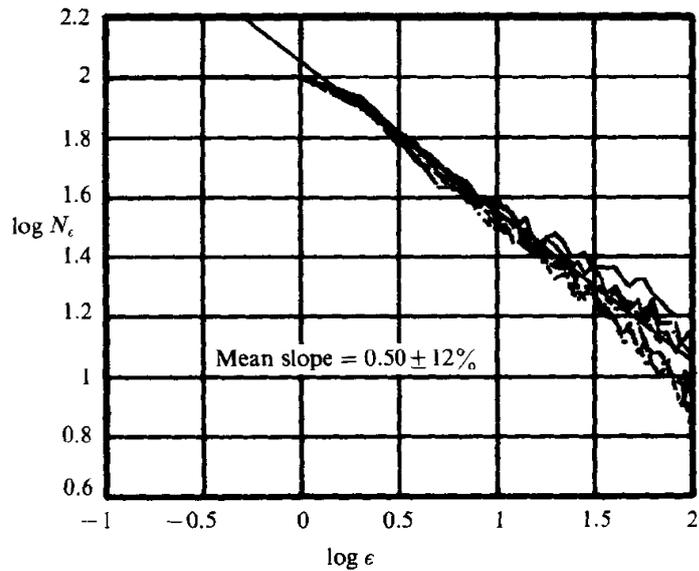


Figura 8: numero dei segmenti di durata fissata con cui si suddivide l'intervallo temporale nella Fig. 7 in corrispondenza dei quali la velocità è pari al valore soglia in funzione della durata (da [10]).

Sembra, dunque, di poter affermare con una certa sicurezza che il campo di velocità in condizioni turbolente è un frattale: se si osserva il campo di moto a una certa scala (risoluzione) in un certo istante di tempo, le linee di corrente formano una **struttura turbolenta**, che si può tentare di immagi-

nare come una struttura vorticososa (Fig. 9). Se ora si ingrandisce una porzione di tale struttura turbolenta (si cambia scala di osservazione aumentando la risoluzione), si riesce a distinguere una struttura turbolenta più piccola, ma statisticamente simile all'altra. Questo processo può essere ripetuto per infinite scale di osservazione, andando a formare un gerarchia multi-scala di strutture turbolente, descritta per la prima volta da Richardson nel 1926 [11], che evolve nel tempo.



Figura 9: gerarchia multi-scala di strutture turbolente (da [6]).

3.2 Cascata energetica

Richardson [11] fu il primo a ipotizzare che le strutture turbolente più piccole ricevano energia (cinetica) da quelle immediatamente più grandi, e così via praticamente senza dissipazioni, con un meccanismo che prende il nome di **cascata energetica**, fino ad arrivare a strutture turbolente così piccole per le quali la viscosità è in grado di dissipare tutta l'energia cinetica trasformandola in calore. In cima a questa cascata energetica sta il moto medio, da cui viene sottratta l'energia necessaria a creare le strutture turbolente; visto che tutta questa energia viene infine dissipata per viscosità, si capisce perché un flusso turbolento è caratterizzato da perdite energetiche maggiori di uno laminare.

Dall'idea di cascata energetica segue che le dimensioni delle strutture turbolente devono necessariamente essere minori della **lunghezza integrale** L caratteristica del dominio geometrico in considerazione (per esempio il diametro D della condotta nel caso considerato nel Par. 2.4) e maggiori di una lunghezza η , detta **lunghezza di Kolmogorov** [12], in corrispondenza della quale la viscosità diviene dominante.

Una stima della lunghezza di Kolmogorov può essere ottenuta immaginando che ad ogni struttura turbolenta di una certa dimensione (lunghezza scala) siano associati una velocità scala e un tempo scala. Per le strutture turbolente più grandi, di dimensione L , la velocità scala è la **velocità integrale** V_L rappresentativa del moto medio (per esempio, nel caso del Par. 2.4, la velocità media sulla sezione trasversale della condotta), mentre il tempo scala T_L risulta pari a L/V_L . Per le strutture turbolente più piccole, di dimensione η , indichiamo la velocità scala con V_η e il tempo scala con

$T_\eta = \eta/V_\eta$. Strutture turbolente intermedie, di dimensione pari a l , avranno velocità scala pari a V_l e tempo scala $T_l = l/V_l$. Per ragioni dimensionali, il tasso con cui l'energia cinetica per unità di massa (di dimensioni pari a una velocità al quadrato diviso un tempo) viene trasmessa da una struttura turbolenta ad una immediatamente più piccola sarà proporzionale alla corrispondente velocità scala al cubo diviso per la lunghezza scala. Dal momento che gli scambi di energia tra le strutture turbolente avvengono senza dissipazioni, deve necessariamente valere che

$$\frac{V_L^3}{L} \sim \frac{V_l^3}{l} \sim \frac{V_\eta^3}{\eta}. \quad (26)$$

Alla scala di Kolmogorov, le forze viscosive devono essere dello stesso ordine di grandezza delle inerzie, cioè il numero di Reynolds Re_η di quelle strutture turbolente deve essere circa pari a 1:

$$\text{Re}_\eta = \frac{\rho V_\eta \eta}{\mu} \approx 1. \quad (27)$$

Esplicitando V_η dall'Eq.(27) e sostituendola nell'Eq.(26), si ottiene

$$\frac{V_L^3}{L} \sim \frac{\mu^3}{\rho^3 \eta^4}, \quad (28)$$

da cui

$$\frac{\eta}{L} \sim \left(\frac{\mu^3}{\rho^3 V_L^3 L^3} \right)^{1/4} = \text{Re}_L^{-3/4}, \quad (29)$$

dove Re_L è il numero di Reynolds del moto medio. L'Eq.(29) ci dice quanto piccole sono le minime strutture turbolente rispetto alla scala integrale.

4 Soluzioni numeriche del moto turbolento

Possiamo ora tornare al problema della determinazione del passo di griglia (o, equivalentemente, del numero di nodi di griglia) necessario per la soluzione numerica delle equazioni che governano il moto turbolento.

4.1 Metodi DNS

Come accennato in precedenza, l'onere computazionale connesso alla soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes in regime turbolento è elevato. La ragione sta nel fatto che, per essere sicuri di descrivere compiutamente la turbolenza, occorre risolvere tutte le scale spaziali associate con la cascata energetica. Detto in altri termini, il passo della griglia spaziale deve essere dell'ordine di grandezza della scala di Kolmogorov: il rapporto tra il passo della griglia spaziale e la lunghezza scala integrale del problema è, dunque, dato dall'Eq.(29). L'inverso del rapporto tra il passo di griglia e la lunghezza L è pari al numero di nodi spaziali lungo una coordinata. Dall'Eq.(29), si vede che il numero di nodi spaziali lungo una coordinata è proporzionale a $\text{Re}_L^{3/4}$. Nelle tre dimensioni (il moto turbolento è sempre tridimensionale), dunque, il numero N_s di nodi della griglia spaziale deve essere proporzionale a $(\text{Re}_L^{3/4})^3 = \text{Re}_L^{9/4}$.

Dal momento che il moto turbolento è, anche, sempre non stazionario, occorre definire il passo della griglia temporale Δt . Per via dei notevoli oneri computazionali, la parte non-stazionaria deve essere risolta in maniera esplicita, per cui occorre soddisfare la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy [13] per la stabilità numerica:

$$\frac{V_L \Delta t}{\eta} < 1. \quad (30)$$

L'Eq.(30) esprime il fatto che l'intervallo di tempo Δt deve essere sufficientemente piccolo da far sì che le particelle di fluido non viaggino per una distanza superiore al passo di griglia spaziale in quell'intervallo di tempo. Dato che il tempo totale simulato in una soluzione numerica è, di solito, dell'ordine del tempo scala integrale $T_L = L/V_L$, il numero di nodi della griglia temporale $N_t = T_L/\Delta t$ risulta, con l'Eq.(29),

$$N_t = \frac{T_L}{\Delta t} > \frac{V_L L}{\eta V_L} = \frac{L}{\eta} \sim \text{Re}_L^{3/4}. \quad (31)$$

Il numero totale di nodi della griglia spazio-temporale necessari per una corretta soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes in condizioni turbolente è, quindi, proporzionale a $\text{Re}_L^{3/4} \text{Re}_L^{9/4} = \text{Re}_L^3$. I metodi numerici che risolvono il moto turbolento discretizzando le equazioni di Navier-Stokes prendono il nome di **metodi DNS** (Direct Numerical Simulations).

Vista la proporzionalità nel numero di nodi col cubo del numero di Reynolds, quest'ultimo costituisce il fattore limitante per l'applicazione dei metodi DNS alla turbolenza.

A titolo esemplificativo, la simulazione DNS di un flusso turbolento tra due lastre piane parallele a più alto numero di Reynolds (Re_L pari a 125000) è stata ottenuta usando un super computer IBM Bluegene/Q in grado di eseguire 10^{16} operazioni in virgola mobile (floating-point operations, FLOP) al secondo (10 PetaFLOPS) [14]. Con questo numero di Reynolds, sono necessari $125000^3 \approx 10^{15}$ nodi di griglia per la simulazione diretta di un tempo scala integrale T_L di moto turbolento. Visto che, per ogni nodo di griglia, vanno risolte 4 equazioni algebriche, si tratta di risolvere un sistema di 4 milioni di miliardi di equazioni algebriche. Il tempo di calcolo necessario è risultato essere pari a 40 ore e sono stati immagazzinati centinaia di Terabyte di dati [16]. Visto che il tempo di calcolo è inversamente proporzionale al numero di operazioni in virgola mobile al secondo [15], la stessa simulazione condotta con una Sony PlayStation 4 (caratterizzata da circa 2 TeraFLOPS) avrebbe richiesto quasi 23 anni.

Nella maggior parte dei casi pratici i numeri di Reynolds sono molto elevati. Per esempio, il numero di Reynolds nel caso di flusso d'acqua all'interno di reti acquedottistiche è dell'ordine di 10^5 (considerando un diametro della tubazione pari a 0.1 m e una velocità di 1 m/s), come nella simulazione DNS appena descritta. Il caso risolto con l'uso del super computer Bluegene/Q corrisponde, grossomodo, a un decimo di secondo (T_L pari a 0.1 m diviso per 1 m/s) di moto turbolento nella tubazione di adduzione dell'acqua potabile alle nostre case. Visto che i tempi di calcolo sono proporzionali al numero di nodi della griglia [15], la simulazione diretta del moto di corsi d'acqua superficiali (fiumi e torrenti) o di flussi aerodinamici attorno ad aeromobili (in cui il numero di Reynolds è dell'ordine di 10^7 e 10^8 , rispettivamente) col super computer IBM Bluegene/Q richiederebbe tempi di calcolo compresi tra centinaia e centinaia di migliaia di anni.

Risulta, allora, evidente che i metodi DNS vanno considerati come strumenti di ricerca, per esempio per testare modelli di turbolenza da usare nelle equazioni di Reynolds, senza possibilità di applicazioni ingegneristiche.

4.2 Metodi RANS

Se la soluzione numerica diretta delle equazioni di Navier-Stokes in condizioni turbolente è impraticabile, si può pensare, come già detto, di risolvere numericamente le equazioni di Reynolds. I metodi numerici dedicati alla soluzione delle equazioni di Reynolds prendono il nome di **metodi RANS**. I metodi DNS e quelli RANS sono tra loro antitetici: in un caso si risolvono direttamente tutte le scale turbolente della cascata energetica, senza modellare alcunché; nell'altro caso, si risolve solo il moto medio e si modella tutta la turbolenza.

I vantaggi computazionali dei metodi RANS rispetto ai DNS sono enormi: non essendoci alcun vincolo fisico sulla dimensione del passo di griglia, quest'ultimo deve solo essere abbastanza piccolo da garantire la stabilità numerica durante l'integrazione e consentire di ottenere una descrizione sufficientemente dettagliata del campo di moto e di pressione medio. Inoltre, abbiamo già accennato al fatto che possibili simmetrie spaziali e/o stazionarietà del moto medio possono consentire una ulteriore riduzione degli oneri computazionali. Si possono, perciò, risolvere flussi ad altissimo numero di Reynolds e questo rende i metodi RANS il principale strumento ingegneristico per il moto turbolento.

Lo svantaggio dei metodi RANS sta nel fatto che la turbolenza deve essere modellata; e il modello non può che essere un'approssimazione della realtà. Nel prossimo Capitolo faremo una panoramica sui modelli di turbolenza che si usano nei metodi RANS. Possiamo già anticipare che nessun modello ha validità universale: in generale, ogni tipologia di modello è efficace solo in talune configurazioni di flusso; sono, inoltre, presenti diversi parametri empirici, il cui valore varia in funzione del flusso in esame. La ragione della mancata universalità dei modelli di turbolenza è comprensibile: i metodi RANS modellano tutte le strutture turbolente della cascata energetica, comprese quelle più grandi, che hanno un contenuto energetico maggiore, e che sono anche quelle maggiormente influenzate dalle condizioni al contorno (hanno dimensioni prossime a quelle del dominio geometrico). Ne risulta che il modello stesso non può che essere influenzato dalle condizioni al contorno.

4.3 Metodi LES

Smagorinsky [17] ha avuto l'intuizione di trovare un compromesso tra l'accuratezza dei metodi DNS, che risolvono tutta la turbolenza, e i vantaggi computazionali dei metodi RANS, che risolvono solo il moto medio: visto che esiste tutta una gerarchia di strutture turbolente a scale diverse, è possibile pensare di risolvere direttamente le strutture turbolente di grande scala (influenzate dalle condizioni al contorno) e modellare le strutture turbolente di piccola scala. Queste ultime, intuitivamente, risultano meno influenzate dalle condizioni al contorno, per cui vi sono maggiori speranze di arrivare a un modello di turbolenza di validità universale.

Tecnicamente, si applica un **filtro passa-basso** alle equazioni di Navier-Stokes (del tutto analogo a quello che si usa nella teoria dei segnali). Tale operatore "lascia passare" (cioè consente di risolvere direttamente) le strutture turbolente a bassa frequenza, mentre "filtra" (cioè richiede di modellare) quelle a frequenza più elevata. Essendo la frequenza pari all'inverso del tempo scala, le strutture a bassa frequenza sono quelle di dimensioni maggiori. L'operazione di filtraggio è analoga a effettuare una media spazio-temporale. Nelle equazioni di Navier-Stokes filtrate compaiono dei

termini incogniti analoghi agli sforzi turbolenti nelle equazioni di Reynolds che richiedono un modello di chiusura (**modello di sotto-griglia**). I metodi numerici che risolvono le equazioni di Navier-Stokes filtrate vengono chiamati **metodi LES** (Large Eddy Simulations). Eddy è il termine inglese con cui ci si riferisce alla struttura turbolenta.

La scala al di sotto della quale le strutture turbolente vengono filtrate dai metodi LES si colloca da qualche parte tra la lunghezza scala integrale L e la lunghezza scala di Kolmogorov η . Tra queste due si può definire una lunghezza scala, detta di Taylor, che divide le strutture turbolente più grandi che non sono influenzate dalla viscosità (range inerziale) da quelle più piccole che, invece, lo sono (range di dissipazione). Le strutture turbolente nel range di dissipazione sono poco influenzate dalle condizioni al contorno: si dice che la turbolenza è localmente isotropa ed omogenea (statisticamente indipendente dall'origine fisica nello spazio). La scala di Taylor ci consente, dunque, di identificare l'ordine di grandezza che deve avere il passo di griglia quando si utilizza un metodo LES per risolvere un flusso turbolento. Dato che il rapporto tra la lunghezza scala di Taylor e la lunghezza scala integrale è proporzionale a $Re_L^{-1/2}$ [18], il numero di nodi spazio-temporali della griglia in un metodo LES è proporzionale a Re_L^2 con notevoli risparmi computazionali rispetto ai metodi DNS.

5 Modelli di chiusura RANS

Abbiamo capito che i metodi RANS consentono di risolvere flussi turbolenti ad alto numero di Reynolds in tempi ragionevoli. Risultano, dunque, attraenti dal punto di vista ingegneristico, e, per questo, i più diffusi. Come già detto, il problema sta nel modellare gli elementi del tensore di Reynolds.

5.1 Modello completo degli sforzi di Reynolds

Una possibilità è quella di ottenere, in maniera rigorosa, equazioni di bilancio per gli sforzi di Reynolds a partire dalle equazioni di bilancio della quantità di moto.

La componente i -esima dell'equazione di bilancio della quantità di moto di Navier-Stokes, dopo aver applicato la decomposizione di Reynolds (Eq.(2)), risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\rho (\langle v_i \rangle + v'_i)]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho (\langle v_j \rangle + v'_j) (\langle v_i \rangle + v'_i)]}{\partial x_j} = \\ -\rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_i} - \frac{\partial (\langle p \rangle + p')}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 (\langle v_i \rangle + v'_i)}{\partial x_j \partial x_j}, \end{aligned} \quad (32)$$

mentre la componente i -esima dell'equazione di bilancio della quantità di moto di Reynolds (Eq.(11)) è

$$\frac{\partial (\rho \langle v_i \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \langle v_j \rangle \langle v_i \rangle)}{\partial x_j} = -\rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \langle v_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\rho \langle v'_j v'_i \rangle)}{\partial x_j}. \quad (33)$$

Sottraendo l'Eq.(33) dall'Eq.(32) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho v'_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \langle v_j \rangle v'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho v'_j \langle v_i \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho v'_j v'_i)}{\partial x_j} = \\ -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial (\rho \langle v'_j v'_i \rangle)}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (34)$$

o, in forma non conservativa, usando le Eqs. (4) e (5),

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \rho \langle v_j \rangle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho v'_j \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} \\ - \frac{\partial (\rho v'_j v'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho \langle v'_j v'_i \rangle)}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (35)$$

Se moltiplichiamo ora l'Eq.(35) per v'_k e mediamo alla Reynolds otteniamo

$$\begin{aligned} \rho \left\langle v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial t} \right\rangle + \rho \langle v_j \rangle \left\langle v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle &= - \left\langle v'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right\rangle + \mu \left\langle v'_k \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle \\ &\quad - \rho \langle v'_k v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} - \left\langle v'_k \frac{\partial (\rho v'_j v'_i)}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

Siccome i e k sono indici liberi, possono essere scambiati tra di loro:

$$\begin{aligned} \rho \left\langle v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial t} \right\rangle + \rho \langle v_j \rangle \left\langle v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right\rangle &= - \left\langle v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \left\langle v'_i \frac{\partial^2 v'_k}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle \\ &\quad - \rho \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial x_j} - \left\langle v'_i \frac{\partial (\rho v'_j v'_k)}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Sommando le Eqs. (36) e (37),

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \langle v'_i v'_k \rangle}{\partial t} + \rho \langle v_j \rangle \frac{\partial \langle v'_i v'_k \rangle}{\partial x_j} &= - \left\langle v'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right\rangle \\ &\quad + \mu \left\langle v'_k \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \mu \left\langle v'_i \frac{\partial^2 v'_k}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle \\ &\quad - \rho \langle v'_k v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} - \rho \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial x_j} \\ &\quad - \left\langle v'_k \frac{\partial (\rho v'_j v'_i)}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle v'_i \frac{\partial (\rho v'_j v'_k)}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Riscriviamo ora i termini a secondo membro dell'Eq.(38) notando che:

$$- \left\langle v'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle p' v'_k \delta_{ij} + p' v'_i \delta_{kj} \rangle + \left\langle p' \left(\frac{\partial v'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle; \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mu \left\langle v'_k \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \mu \left\langle v'_i \frac{\partial^2 v'_k}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left\langle v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle + \mu \left\langle v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right\rangle \right) \\ &\quad - 2\mu \left\langle \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle; \end{aligned} \quad (40)$$

e, con l'Eq.(5),

$$- \left\langle v'_k \frac{\partial (\rho v'_j v'_i)}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle v'_i \frac{\partial (\rho v'_j v'_k)}{\partial x_j} \right\rangle = - \frac{\partial (\rho \langle v'_i v'_j v'_k \rangle)}{\partial x_j}. \quad (41)$$

Con le Eqs. (39), (40) e (41), l'Eq.(38) diventa

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial \langle v'_i v'_k \rangle}{\partial t} + \rho \langle v_j \rangle \frac{\partial \langle v'_i v'_k \rangle}{\partial x_j} &= \left\langle p' \left(\frac{\partial v'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle \\
- \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle p' v'_k \delta_{ij} + p' v'_i \delta_{kj} + \rho v'_i v'_j v'_k - \mu v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \mu v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right\rangle \\
- \rho \left(\langle v'_k v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial x_j} \right) \\
- 2\mu \left\langle \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle, \tag{42}
\end{aligned}$$

dove: i termini a primo membro rappresentano il trasporto dello sforzo di Reynolds $\rho \langle v'_i v'_k \rangle$ ad opera del campo medio; il primo termine a secondo membro rappresenta il termine di scambio tra fluttuazioni di velocità e fluttuazioni di pressione; il secondo termine a secondo membro è un termine di divergenza ed è associato con processi di diffusione; il terzo termine a secondo membro rappresenta la produzione ad opera del campo di moto medio; il quarto termine a secondo membro rappresenta la dissipazione viscosa.

L'Eq.(42) rappresenta l'equazione di bilancio per il generico elemento del tensore degli sforzi di Reynolds (**equazione dello sforzo di Reynolds**). Purtroppo, questa equazione, che avrebbe dovuto consentirci di chiudere le equazioni di Reynolds, non è chiusa a sua volta. Vi compaiono termini incogniti ulteriori (per esempio medie del prodotto tra fluttuazioni di velocità e pressione, medie del triplo prodotto di fluttuazioni di velocità) che devono essere a loro volta modellati. Si può sempre pensare di ottenere ulteriori equazioni di bilancio per queste nuove incognite con procedimenti del tutto analoghi a quanto fatto in questo paragrafo. Tali procedimenti introdurrebbero, però, ulteriori nuove incognite, e così via, all'infinito.

I modelli che utilizzano l'Eq.(42) per chiudere le equazioni di Reynolds, con opportune espressioni per esprimere i termini incogniti in funzione delle grandezze del moto medio, prendono il nome di **modelli completi agli sforzi di Reynolds**. I metodi RANS che chiudono il problema della turbolenza con questi modelli richiedono la soluzione numerica di un sistema di 10 equazioni differenziali (1 di continuità, 3 di bilancio di quantità di moto e 6 di bilancio degli sforzi di Reynolds). L'onere computazionale è, perciò, notevole. Sono, d'altronde, necessari quando la turbolenza è fortemente anisotropa (i termini diagonali del tensore di Reynolds sono molto diversi tra di loro), per esempio nel caso di getti turbolenti.

5.2 Viscosità turbolenta

Come più volte ricordato, il problema della chiusura della turbolenza consiste nel trovare una relazione tra gli sforzi di Reynolds e le caratteristiche del moto. Un problema simile è già stato incontrato quando abbiamo espresso

il legame reologico tra gli sforzi viscosi e le velocità di deformazione in un fluido Newtoniano (Cap. 8, Par. 1.1):

$$\overline{\overline{\Phi}} = \left[\frac{\text{Tr}(\overline{\overline{\Phi}})}{3} + \frac{2}{3}\rho\nu\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} \right] \overline{\mathbf{I}} - 2\rho\nu\overline{\overline{\mathbf{D}}}, \quad (43)$$

dove abbiamo usato l'ipotesi di Stokes (che la pressione p è pari a un terzo della traccia del tensore) e abbiamo sostituito la viscosità dinamica molecolare μ con $\rho\nu$ (con ν viscosità cinematica molecolare). Siamo tentati, dunque, di esprimere il tensore degli sforzi di Reynolds, per analogia, come:

$$\overline{\overline{\Phi}}_{\text{Re}} = \left[\frac{\text{Tr}(\overline{\overline{\Phi}}_{\text{Re}})}{3} + \frac{2}{3}\rho\nu_{\text{turb}}\nabla \cdot \langle \overline{\mathbf{v}} \rangle \right] \overline{\mathbf{I}} - 2\rho\nu_{\text{turb}} \langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \rangle, \quad (44)$$

dove ν_{turb} è la **viscosità cinematica turbolenta** e $\langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \rangle$ è il tensore **medio** delle velocità di deformazioni, il cui generico elemento è $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} \right)$. L'ipotesi che il tensore degli sforzi di Reynolds possa essere rappresentato dall'Eq.(44) prende il nome di **ipotesi di Boussinesq** [4]. Si basa sull'analogia tra l'agitazione delle molecole che sta all'origine degli sforzi viscosi e il moto di fluttuazione delle particelle che sta all'origine degli sforzi turbolenti.

Mentre la viscosità molecolare è una proprietà del fluido, la viscosità turbolenta è una proprietà del flusso (cioè dipende dal moto stesso). Questo significa che non è possibile usare un unico valore di viscosità turbolenta indipendentemente dalle condizioni di flusso: è necessario legarla alle caratteristiche del moto medio. Un altro problema associato con l'idea di viscosità turbolenta è che essa rappresenta uno scalare e non può tenere conto di anisotropie nella turbolenza, al contrario del modello completo agli sforzi di Reynolds. Nonostante ciò, i modelli di viscosità turbolenta sono largamente usati per applicazioni ingegneristiche.

La viscosità turbolenta ν_{turb} è dimensionalmente pari al prodotto tra una velocità e una lunghezza. Se si riescono ad individuare una velocità scala v_{turb} e una lunghezza scala l_{turb} rappresentative dei fenomeni turbolenti, deve allora risultare $\nu_{\text{turb}} \propto v_{\text{turb}}l_{\text{turb}}$, con il coefficiente di proporzionalità di ordine uno. I modelli di viscosità turbolenta si differenziano in base alla scelta di queste due grandezze scala, e sul tipo di equazioni da risolvere per ottenerle.

5.2.1 Modelli a zero equazioni

Se le due grandezze scala v_{turb} e l_{turb} vengono fornite da espressioni algebriche, senza necessità di risolvere ulteriori equazioni differenziali, si parla di **modelli a zero equazioni**.

I modelli a zero equazioni maggiormente utilizzati sono quelli che si basano sulla **lunghezza di mescolamento**, introdotta da Prandtl nel 1925 [19]. Prandtl ha riproposto l'analogia di Boussinesq [4] tra la turbolenza e la teoria cinetica dei gas [20], ipotizzando che: (i) la lunghezza scala l_{turb} da inserire nell'espressione della viscosità turbolenta sia la lunghezza di mescolamento l_m (che nella teoria cinetica dei gas rappresenta la lunghezza di cammino libero, cioè la distanza media percorsa da una molecola tra una collisione e l'altra); (ii) la velocità scala v_{turb} sia pari al prodotto tra la lunghezza di mescolamento e una qualche misura del gradiente di velocità medio locale.

Applichiamo il modello di Prandtl al caso di moto turbolento in condotta analizzato nel Par. 2.4. Lo sforzo di Reynolds che vi compare risulta, usando l'Eq.(44):

$$\rho \langle u'v_r' \rangle = -\rho\nu_{turb} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r}. \quad (45)$$

Facciamo ora due ipotesi: supponiamo di essere sufficientemente lontani dalla parete da poter trascurare il contributo viscoso nello sforzo tangenziale ($\tau \approx \tau_{turb}$); supponiamo di essere sufficientemente vicini alla parete da poter considerare lo sforzo tangenziale circa pari a quello massimo alla parete τ_0 . Con queste ipotesi risulta

$$\tau_0 = -\rho\nu_{turb} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r}. \quad (46)$$

Se poniamo $\nu_{turb} = v_{turb}l_{turb}$, con $l_{turb} = l_m$ e $v_{turb} = -l_m \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r}$, e introduciamo la coordinata $y = \frac{D}{2} - r$ (distanza dalla parete), l'Eq.(46) diventa

$$\frac{\tau_0}{\rho} = l_m^2 \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right)^2, \quad (47)$$

o, introducendo la **velocità d'attrito** $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\langle u \rangle}{u^*} \right) = \frac{1}{l_m}. \quad (48)$$

Con l'**ipotesi di von Kármán** [21] che la lunghezza di mescolamento sia proporzionale alla distanza dalla parete, $l_m = \kappa y$, con κ costante di von Kármán, l'Eq.(48) può essere integrata per ottenere il **profilo logaritmico** delle velocità medie, detto anche **legge logaritmica di parete**,

$$\frac{\langle u \rangle}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right), \quad (49)$$

dove y_0 rappresenta la distanza virtuale dalla parete in corrispondenza della quale la velocità media data dall'Eq.(49) sarebbe nulla. Tale origine del

profilo logaritmico è solo virtuale in quanto nella realtà il profilo di velocità si annulla alla parete, dove però sono nulli anche gli sforzi turbolenti e l'analisi condotta perde di significato. La grandezza y_0 deve essere proporzionale ad una lunghezza scala caratteristica del moto in prossimità della parete.

Nel caso di parete (idraulicamente) liscia, esiste, come già detto, un substrato limite viscoso nel quale la scabrezza è interamente annegata. La lunghezza scala caratteristica deve, dunque, avere a che fare con la viscosità. Una lunghezza scala viscosa si può costruire dividendo la viscosità cinematica molecolare per una velocità scala, in questo caso costituita dalla velocità d'attrito u^* . Si può allora porre $y_0 = k_1 \nu / u^*$, dove k_1 è una costante numerica da determinare *sperimentalmente*. Con questo, l'Eq.(49) diventa

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ - \frac{1}{\kappa} \ln k_1, \quad (50)$$

dove $u^+ = \langle u \rangle / u^*$ e $y^+ = y u^* / \nu$ sono velocità e distanza dalla parete adimensionali. Gli esperimenti di Nikuradse [22] hanno permesso di determinare il valore delle costanti, $\kappa \simeq 0.4$ e $k_1 \simeq 1/9$, per cui l'Eq.(50) risulta

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5. \quad (51)$$

Se ammettiamo che il profilo logaritmico sia valido fino in corrispondenza dell'asse (impossibile, visto che lì la derivata del profilo di velocità lungo y deve annullarsi per simmetria), la velocità massima in corrispondenza dell'asse risulta

$$u_{max}^+ = 2.5 \ln \left(\frac{D u^*}{2\nu} \right) + 5.5, \quad (52)$$

e, combinando l'Eq.(51) con l'Eq.(52),

$$u_{max}^+ - u^+ = 2.5 \ln \left(\frac{D}{2y} \right). \quad (53)$$

La media dell'Eq.(53) sulla sezione trasversale al flusso risulta

$$\frac{1}{A} \int_A (u_{max}^+ - u^+) dA = u_{max}^+ - V^+ = C_1, \quad (54)$$

dove $V^+ = \langle V \rangle / u^*$ (velocità media adimensionale sulla sezione trasversale) e C_1 è una costante formalmente risultato dell'integrazione del termine a destra dell'uguale nell'Eq.(53). In realtà, il valore di C_1 viene determinato sperimentalmente è risulta pari a 4.78. Con questo, e le Eqs. (52) e (54), si può, dunque, esprimere la velocità media sulla sezione trasversale al flusso come

$$\frac{\langle V \rangle}{u^*} = 2.5 \ln \left(\frac{D u^*}{2\nu} \right) + 0.72. \quad (55)$$

Lo sforzo tangenziale alla parete è pari, con l'Eq.(21), a

$$\tau_0 = \gamma \frac{D}{4} J. \quad (56)$$

Sostituendo l'espressione di Darcy-Weisbach della cadente (Cap. 7, Par. 1) e semplificando,

$$u^{*2} = \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\lambda}{8} \langle V \rangle^2. \quad (57)$$

Sostituendo l'Eq.(57) nell'Eq.(55),

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}} = 2.5 \ln \left(\frac{\text{Re}\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{8}} \right) + 0.72, \quad (58)$$

dove $\text{Re} = \langle V \rangle D/\nu$ è il solito numero di Reynolds. Passando al logaritmo in base 10 (che era, ai tempi di Prandtl, più comodo per i calcoli), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln \left(\frac{\text{Re}\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{8}} \right) + \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln \left[(\exp 0.72)^{\sqrt{8}/2.5} \right] \\ &= \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln \left(\frac{2.258 \text{Re}\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{8}} \right) \\ &= -\frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln \left(\frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right) \\ &= -\frac{2.5}{\sqrt{8} \log_{10} e} \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right) \\ &= -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right), \end{aligned} \quad (59)$$

cioè la formula di Prandtl-von Kármán per tubi lisci, già introdotta nel Cap. 7, Par. 1.2.1.

Il profilo logaritmico di velocità dato dall'Eq.(51) deve smettere di esser valido all'interno del substrato limite viscoso. All'interno del substrato limite viscoso, lo sforzo tangenziale turbolento è nullo, per cui risulta, dalla legge di Newton,

$$\tau_0 = \rho\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}, \quad (60)$$

o, riarrangiando e integrando con la condizione di no-slip alla parete,

$$\frac{\langle u \rangle}{u^*} = u^+ = \frac{yu^*}{\nu} = y^+. \quad (61)$$

Il profilo di velocità nel substrato limite viscoso è, dunque, lineare. Dal momento che deve esserci continuità nel profilo di velocità, se ammettiamo che il profilo logaritmico sia valido fino al bordo del substrato limite viscoso, la velocità in $y = \delta$ data dall'Eq.(51) deve essere uguale a quella data dall'Eq.(61), per cui

$$\delta^+ = 2.5 \ln \delta^+ + 5.5. \quad (62)$$

dove $\delta^+ = \delta u^*/\nu$ è lo spessore adimensionale del substrato limite viscoso (detto anche **numero di Nikuradse**). Questa equazione trascendente può essere risolta per tentativi, ottenendo

$$\delta^+ \simeq 11.5, \quad (63)$$

o, con l'Eq.(57),

$$\frac{\delta}{D} \simeq \frac{11.5\sqrt{8}}{\text{Re}\sqrt{\lambda}}, \quad (64)$$

da cui si vede che lo spessore del substrato limite viscoso diminuisce con l'aumentare del numero di Reynolds.

Quando lo spessore del substrato limite viscoso è così piccolo da permettere a tutte le asperità superficiali di parete di emergere da esso, il moto diventa assolutamente turbolento. In tale condizione, la lunghezza scala cui è proporzionale l'origine virtuale y_0 del profilo logaritmico di velocità deve essere la scabrezza \mathcal{R} . Se ripercorriamo l'analisi fatta, con $y_0 = k_2\mathcal{R}$, dove k_2 è ancora una costante da determinare sperimentalmente,

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\mathcal{R}}\right) - \frac{1}{\kappa} \ln k_2. \quad (65)$$

Risulta $k_2 = 1/30$, per cui,

$$u^+ = 2.5 \ln\left(\frac{y}{\mathcal{R}}\right) + 8.5. \quad (66)$$

La velocità massima in corrispondenza dell'asse della condotta risulta, in questo caso,

$$u_{max}^+ = 2.5 \ln\left(\frac{D}{2\mathcal{R}}\right) + 8.5, \quad (67)$$

e la velocità media sulla sezione trasversale al flusso è data dalla

$$\frac{\langle V \rangle}{u^*} = 2.5 \ln\left(\frac{D}{2\mathcal{R}}\right) + 8.5 - C_2. \quad (68)$$

Il valore di C_2 ricavato sperimentalmente risulta pari a 6.73. Con questo, e usando l'Eq.(57), si ottiene

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}} = 2.5 \ln\left(\frac{D}{2\mathcal{R}}\right) + 1.77. \quad (69)$$

Passando al logaritmo in base 10, si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln \left(\frac{D}{2\mathcal{R}} \right) + \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln \left[(\exp 1.77)^{\sqrt{8}/2.5} \right] \\
&= \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln \left(\frac{7.42D}{2\mathcal{R}} \right) \\
&= -\frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln \left(\frac{1}{3.71} \frac{\mathcal{R}}{D} \right) \\
&= -\frac{2.5}{\sqrt{8} \log_{10} e} \log_{10} \left(\frac{1}{3.71} \frac{\mathcal{R}}{D} \right) \\
&= -2 \log_{10} \left(\frac{1}{3.71} \frac{\mathcal{R}}{D} \right), \tag{70}
\end{aligned}$$

cioè la formula di Prandtl-von Kármán per tubi scabri, già introdotta nel Cap. 7, Par. 1.2.2.

5.2.2 Modelli a una equazione

Tra il modello completo degli sforzi di Reynolds, che richiede di risolvere 6 equazioni differenziali aggiuntive per gli elementi del tensore di Reynolds, e i modelli a zero equazioni, che introducono due equazioni algebriche aggiuntive che legano la viscosità turbolenta al campo di moto medio, esistono possibilità intermedie per la chiusura della turbolenza nei metodi RANS.

Una possibilità è quella di descrivere le due grandezze scala nella viscosità turbolenta tramite un'equazione algebrica e un'equazione differenziale di trasporto, in modo da cogliere meglio l'influenza delle condizioni al contorno e dell'evoluzione della turbolenza sul tensore di Reynolds. Approcci di questo tipo vengono detti **modelli a una equazione** (con l'enfasi posta sull'equazione differenziale aggiuntiva).

Il primo esempio di modello a una equazione è quello di Prandtl e Kolmogorov [23, 24]. In questo modello, si nota che la traccia del tensore di Reynolds che compare nell'Eq.(44) è proporzionale all'energia cinetica associata con il moto di agitazione, una misura dell'intensità della turbolenza. Se dividiamo per 2ρ , otteniamo

$$K = \frac{1}{2} \langle v'_i v'_i \rangle, \tag{71}$$

dove K è l'**energia cinetica turbolenta** per unità di massa. A questo punto, si pone la velocità scala nella viscosità turbolenta uguale alla radice quadrata di K , mentre la lunghezza scala l_{turb} continua ad essere identificata con la lunghezza di mescolamento, per cui

$$\nu_{turb} = l_m \sqrt{K}. \tag{72}$$

Per la lunghezza di mescolamento si adotta un'espressione algebrica da determinare su base empirica (con le stesse limitazioni, dunque, dei modelli a zero equazioni). Per l'energia cinetica turbolenta si risolve, invece, un'equazione differenziale. Tale equazione può essere formalmente ricavata ponendo $k = i$ nell'Eq.(42), dividendo per 2ρ e usando l'Eq.(5),

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial K}{\partial x_j} = - \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \frac{p'}{\rho} v'_i \delta_{ij} + \frac{1}{2} v'_i v'_j v'_i - \frac{\nu}{2} \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (73)$$

dove $\epsilon = \frac{\nu}{2} \left\langle \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle$ rappresenta la **dissipazione viscosa** dell'energia cinetica turbolenta. Sulla base di considerazioni dimensionali, si può porre:

$$\epsilon = c_d \frac{K^{3/2}}{l_m}, \quad (74)$$

dove c_d è un coefficiente numerico da determinare empiricamente. Il primo termine a secondo membro dell'Eq.(73) rappresenta la **produzione** di energia cinetica turbolenta da parte degli sforzi di Reynolds. Il terzo termine a secondo membro rappresenta la **diffusione** di energia cinetica turbolenta dovuta all'agitazione molecolare. Anche l'ultimo termine a secondo membro è un termine di diffusione, dovuto però essenzialmente all'agitazione turbolenta. Per analogia con i processi di diffusione, si può, dunque, porre

$$\left\langle \frac{p'}{\rho} v'_i \delta_{ij} + \frac{1}{2} v'_i v'_j v'_i - \frac{\nu}{2} \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} \right\rangle \simeq \left\langle \frac{p'}{\rho} v'_i \delta_{ij} + \frac{1}{2} v'_i v'_j v'_i \right\rangle = - \frac{\nu_{turb}}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_i}, \quad (75)$$

dove, ancora una volta, σ_K è un coefficiente numerico empirico. L'equazione di trasporto per l'energia cinetica turbolenta diventa, in definitiva,

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial K}{\partial x_j} = - \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_{turb}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_i} \right], \quad (76)$$

che unita alle Eqs. (44), (72), (74) e a un'espressione algebrica per la lunghezza di mescolamento, consente la chiusura delle equazioni di Reynolds.

5.2.3 Modelli a due equazioni

Per superare il limite dei modelli a una equazione, si può pensare di determinare anche la lunghezza scala l_{turb} attraverso un'equazione differenziale di trasporto. Approcci di questo tipo sono detti **modelli a due equazioni**.

Jones e Launder [25] hanno proposto di usare la dissipazione viscosa ϵ per esprimere, sulla base di considerazioni dimensionali, la lunghezza di

mescolamento nell'Eq.(72) come $l_m \propto K^{3/2}/\epsilon$. Con questo, la viscosità turbolenta si scrive

$$\nu_{turb} = C_\mu \frac{K^2}{\epsilon}, \quad (77)$$

dove C_μ è un coefficiente numerico empirico. Per l'energia cinetica turbolenta, si usa ancora l'Eq.(76):

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial K}{\partial x_j} = - \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_{turb}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_i} \right]. \quad (78)$$

Si potrebbe ricavare un'equazione di trasporto per ϵ in maniera rigorosa, così come già fatto per K . Si preferisce, però, scrivere un'equazione differenziale caratterizzata da termini di trasporto, produzione, dissipazione e diffusione mutuati da quelli che compaiono nell'Eq.(78), introducendo opportuni coefficienti basati su considerazioni dimensionali,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = -C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_{turb}}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right], \quad (79)$$

L'insieme delle Eqs. (44) e (77)-(79) prende il nome di **modello kappa-epsilon**, ed è il modello di chiusura della turbolenza più usato per scopi ingegneristici. I valori dei 5 coefficienti numerici che vi compaiono sono, solitamente, $C_\mu = 0.09$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$, $\sigma_K = 1$ e $\sigma_\epsilon = 1.3$.

Riferimenti bibliografici

- [1] Lord Kelvin (Thomson, W.), *On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid*, Phil. Mag., 24, 342-353 (1887).
- [2] George, W.K., *Lectures in Turbulence for the 21st Century*, http://www.turbulence-online.com/Publications/Lecture_Notes/Turbulence_Lille/TB_16January2013.pdf (2013).
- [3] Reynolds, O., *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*, Philos. Trans. R. Soc., 186, 123-164 (1895).
- [4] Boussinesq, J., *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, 23, 1-680 (1877).
- [5] Flanders, H., *Differentiation under the integral sign*, The American Mathematical Monthly, 80(6), 615-627 (1973).
- [6] Jimenez, J., *The contributions of A. N. Kolmogorov to the theory of turbulence*, Arbor CLXXVIII, 704, 589-606 (2004).
- [7] Mandelbrot, B.B., *Fractals: form, chance, and dimension*, W.H. Freeman (1977).
- [8] Sreenivasan, K.R., *Fractals and Multifractals in fluid turbulence*, Ann. Rev. Fluid Mech., 23, 539-600 (1991).
- [9] Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman (1982).
- [10] Sreenivasan, K.R., and Meneveau, C. *The fractal facets of turbulence*, J. Fluid Mech., 173, 357-386 (1986).
- [11] Richardson, L.F., *Atmospheric diffusion shown in a distance neighbour graph*, Proc. R. Soc. London A, 110, 709-737 (1926).
- [12] Kolmogorov, A.N., *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids at very large Reynolds numbers*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 30, 299-303 (1941). Reprinted in Proc. R. Soc. London A 434, 9-13 (1991).
- [13] Courant, R., Friedrichs, K.O. and Lewy, H., *Ueber die partiellen Differenzgleichungen der mathematische Physik*, Math. Ann., 100, 32-74 (1928).
- [14] Lee, M., and Moser, R.D., *Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau \approx 5200$* , J. Fluid Mech., 774, 395-415 (2015).

- [15] Pope, S.B., *Turbulent flows*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2000).
- [16] Lee, M., Ulerich, R., Malaya, N., and Moser, R.D. *Experiences from leadership computing in simulations of turbulent fluid flows*, *Comput. Sci. Engng.*, 16(5), 24-31 (2014).
- [17] Smagorinsky, J., *General Circulation Experiments with the Primitive Equations*, *Monthly Weather Review*, 91 (3), 99-164 (1963).
- [18] Tennekes, H., and Lumley, J.L., *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cambridge, MA, USA (1972).
- [19] Prandtl, L., *Bericht ber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*, *Z. Angew. Math. Mech.*, 5, 136-139 (1925).
- [20] Chapman, S., and Cowling, T.G., *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1970).
- [21] von Kármán, T., *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz*, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Fachgruppe 1 (Mathematik)*, 5, 58-76 (1930).
- [22] Nikuradse, J., *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren*, *ForschHft. auf dem Geb. des Ingenieurwesens*, 356 (1932).
- [23] Kolmogorov, A.N., *The equations of turbulent motion in an incompressible fluid*, *Izv. Akad. Sci., USSR Phys.*, 6, 56-58 (1942).
- [24] Prandtl, L., *Über ein neues formal-system für die ausgebildete turbulenz*, *Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math-Phys., KI.*, 6-19 (1945).
- [25] Jones, W.P., and Launder, B.E., *The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence*, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 15, 301-314 (1972).